exercices de graphes.

IUT Blanganc, année 2003-2004.

culus@univ-tlse2.fr

Introduction. Ce premier exercice montre la difficulté algorithmique dûe au temps de calcul dans certain problème de mathématiques discrètes.
On se pose le problème d'affectation suivant:
Un nouvel hôpital va prochainement ouvrir ses portes. Le bâtiment est déjà construit, et dispose de 30 zones différentes (notées 1,2,3,...,29,30), chacunes d'entres elles pouvant accueillir indistinctement l'un des 30 services de l'hôpital (notés A,B,...,Y,Z,A',B',C',D').
L'administration hospitalière vous fournit les nombres moyens de transferts (déplacements) entre chaques services (par exemple, en moyenne, par jour, il y a 10 patients passant du service A vers le service B ...)..
Le cabinet d'architects, lui, vous fournit le temps moyens de transfert d'une zone du futur hopital vers toutes les autres zones (par exemple, il faut 50 sec. pour passer de la zone 1 à la zone 2).
Votre travail est, bien sûre, d'affecter les services de l'hôpital de manière optimale, c'est à dire de facon à rendre minimal le temps cumulé des déplacements.
Vous disposez pour cela d'un ordinateur actuel...
1. Calculer le nombre d'affectations différentes des 30 services parmi les 30 zones du bâtiment.
2. L'ordinateur dont vous disposez peut effectuer 1 milliard d'opérations à la seconde.
Estimez (grossièrement) le temps que vous mettrez afin d'obtenir, par une méthode exhaustive (ie: en essayant toutes les solutions), l'une des meilleures configurations donnant le temps cumulé de transfert minimal.

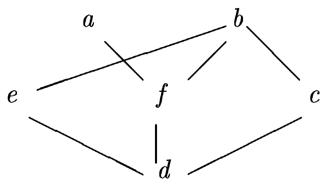
Cet exercice devrait vous convaincre que la puissance de calcul d'ordinateurs peut s'avérer parfois insuffisante, même pour des problèmes dont l'énoncé ne met pas en jeu des proportions astronomiques. Le fait est que de tres nombreux problèmes faisant intervenir des instruments combinatoires génèrent des tailles de calculs prohibitifs.
A titre d'exemple, on estime que le nombre d'atomes dans l'univers est inférieur à 100! ; de nombreux problèmes peuvent faire intervenir ce nombre de permutations comme étant l'ensemble qu'il faut parcourir afin de rechercher la meilleure slolution...

Chapitre 1: Introduction

Exercice 1 *(Nombre de graphes à n sommets)*
Soit n un entier. Combien y a t-il de graphes différents ayant n sommets? (justifiez)
Indication: On pourra se demander dans un premier temps combien il y a de couples (u,v) de sommets différents dans un tel graphe.

Notez qu'ici, on reste un peu flou sur la notion de graphes "différents". La notion ultérieure d'isomorphisme viendra clarifier (un peu) cela.
Vocabulaire:
V(G) désigne l'ensemble des sommets (Vertex en anglais) du graphe G, alors que E(G) (Edges en anglais) désigne lui l'ensemble des arêtes du graphe G.
L'arête entre les sommets x et y sera généralement noté $\{x, y\}$. Les sommets x et y seront dit "voisins".
On désigne par $|G|$, dit l'ordre de G, le nombre des sommets du graphe G.
$d_G(x)$ désigne le degré du sommet x, c'est à dire le nombre d'arêtes incidentes au sommet x dans le graphe G.

Exercice 2 *(Lecture d'un graphe)*
On considère le graphe ci-contre.
1. Donnez les ensembles V(G) et E(G).
2. Donnez le degré de chaques sommets,
et vérifier sur cet exemple le théorème 1 (cf ci-dessous).



Notion d'isomorphisme: Cette notion permet de formaliser le fait que deux graphes puissent etre identique à étiquetage des sommets près.
Rappelons que deux graphes G et G' sont dit isomorphes s'il existe une application bijective de V(G) dans V(G') qui conserve l'adjacence, c'est à dire que: $\{x, y\} \in E(G) \iff \{\phi(x), \phi(y)\} \in V(G')$.

Exercice 3 *(Sur les graphes isomorphes)*
Parmi les figures suivantes, donnez ceux qui sont des graphes.
Puis déterminez les classes d'isomorphismes (ie: dites quels graphes sont isomorphes).

L'importance du problème d'isomorphisme viens du fait que ce soit à la fois très courant (et naturel) de vouloir savoir si deux graphes donnés sont identiques, mais aussi que pratiquement, ce soit un problème, pour le moment, tres difficile à résoudre.

Exercice 4 *(Difficulté de la résolution du problème d'isomorphisme).*
1. Montrer que pour que G et G' soient deux graphes isomorphes, il est nécéssaire qu'ils aient:
- même nombre de sommets.
- même nombre d'arêtes.
2. Montrer que l'image d'un sommet $x \in V(G)$ par un isomorphisme ϕ est nécéssairement un sommet de V(G') de même degré.
Montrer alors que pour que G et G' soient isomorphes, il est nécéssaire qu'ils aient même suite de degré (ie la liste ordonnée par exemple par ordre croissant des degrés des sommets doit être la même pour G et pour G').
Ces conditions ne sont pourtant pas suffisantes: trouvez un contre exemple a cette troisième condition.

3. Comme on ne connait pas pour l'heure de condition nécéssaire et suffisante afin de savoir si deux graphes sont isomorphes ou non, il ne nous reste, pour deux graphes G et G' vérifiant les conditions précédentes, que la méthode exhaustive, ie: tenter toutes les permutations possibles jusqu'a en trouver une qui marche (et alors les deux graphes sont isomorphes), ou jusqu'à les avoir toutes épuisées (et alors G et G' ne sont pas isomorphes).
On suppose que les graphes G et G' vérifient les conditions précédentes.
Combien y a t'il de bijections entre les ensembles V(G) et V(G'). (On pourra dans un premier temps se contenter d'un résultat n'utilisant pas d'informations sur les graphes, puis tenter d'insérer des paramètres sur les graphes afin de faire diminuer le nombre de solutions à parcourir).

Correction:
1. ϕ isomorphisme entre G et G' implique que ϕ soit une bijection entre les ensemble V(G) et V(G'), donc ces ensembles ont même cardinal.
Pour l'identité entre les nombres d'arêtes, on peut raisonner par contraposée: il suffit de voir que si G et G' n'ont pas même nombre d'arêtes, alors quelque soit la bijection ϕ entre les ensembles V(G) et V(G'), elle ne pourra vérifier la condition de conservation de l'adjacence.
2. L'image par un isomorphisme $\phi : V(G) \to V(G')$ d'un sommet x est un sommet $\phi(x)$ ayant même degré.
En effet, l'application ϕ conserve l'adjacence, donc $\{x, y\} \in E(G) \iff \{\phi(x), \phi(y)\} \in E(G')$; ainsi, à chacun des voisins de x corresponds un voisin (différent car ϕ est une bijection) de $\phi(x)$: les sommets x et $\phi(x)$ ont donc mêmes degré.
Cette (importante) remarque permet de démontrer que les suites de degré de graphes isomorphes sont identiques.
3. Si l'on considère le nombre de bijection entre les ensembles de sommets, il y en a n!, ce qui est beaucoups.
Si l'on utilise la remarque précédente, on peut diminuer un peu la taille de l'ensemble á parcourir: un sommet devant par ϕ être envoyé sur un sommet de même degré, on peut se restreindre aux bijections vérifiant cette condition. Soit par exemple $(k_1, k_2, ..., k_{n-1})$ le nombre de sommet de degré 1,2,... n-1 dans G et G' (ce sont les mêmes suites). Le nombre de bijection envoyant un sommet de V(G) sur un sommet de même degré de $V(G')$ est alors de $k_1! * k_2! * ... * k_{n-1}!$, ce qui reste encore beaucoups pour un traitement algorithmique par une machine. On remarquera que dans l'exemple précédent, si tout les sommets sont de degré i, alors $k_i = n$ et sinon $k_j = 0$ pour $j \neq i$, et on retrouve la même complexité que notre premier calcul.

Exercice 5 *(Théorème 1)*
1. Démontrez le théorème suivant: Si G est un graphe d'ordre n (les sommets seront ici notés $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$) et ayant m arêtes, alors nous avons: $\sum_{i=1}^{n} d_G(x_i) = 2m$
2. Est-il possible de construire un graphe d'ordre 5, et ayant pour suite de degré: (3,3,2,2,2) ?
3. Est-il possible de construire un graphe d'ordre 7 et ayant pour suite de degré (5,5,4,4,2,1,0) ?

Exercice 6 *(Graphe complet)*
Un graphe est dit complet si son nombre d'arête est maximum.
1. Montrer que dans un graphe complet d'ordre n, chaque sommet est de degré n-1.
2. Donnez le nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre n.
3. Soit G et G' deux graphes complets d'ordre n. Sont ils isomorphes?
4. Soit G un graphe d'ordre 6. Montrer que G ou $\bar{G}$ (son complémentaire) contient un triangle.
Note: On définit le complémentaire d'un graphe G comme étant le graphe $\bar{G}$ ayant même sommets, et dont les arêtes vérifient: $\{x, y\} \in E(\bar{G}) \iff \{x, y\} \notin E(G)$.

Chapitre 2: Préliminire techniques

Nous abordons désormais la notion de graphe orienté; ainsi, nous avons plus une "simple" relation binaire entre les sommets (les arêtes), mais une relation avec une orientation (en fait, la relation binaire n'est plus symétrique). On note donc un arc (x,y) le lien allant de x à y (x domine y), et on distingue la notion de degré entrant $d^-(x)$ (somme des arcs dont x est l'extrémité terminale) et la notion de degré sortant $d^+(x)$ (arcs dont x est l'extrémité initiale).

Exercice 7 *(Construction de graphes)*
1. Peut on construire les graphes (non orientés) d'ordres 4, ayant les suites de degrés suivante:
G: (0;1;2;3); G': (1,2,2,3).
Trouvez les éventuels graphes ayant ces suites de degrés (s'ils existent!) à isomorphisme près (ie: ne donnez pas 2 graphes isomorphes).
2. Peut on construire les graphes orientés ayant les degrés suivants:

A

d^+	d^-
2	0
2	1
1	2
0	2

;

B

d^+	d^-
2	0
1	2
1	2
1	2
2	1

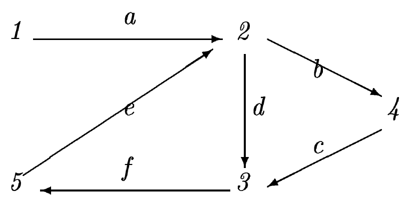
;

C

d^+	d^-
2	3
2	1
1	1
1	0
0	0
0	0

.

Exercice 8 *(Codage d'un graphe).*
On considère le graphe ci-contre:
Donnez son codage par sa matrice d'adjacence.
Donnez son codage par sa matrice d'incidence.
Ce graphe comporte-il des circuits? Si oui, donnez les.
Enfin, donnez les composantes fortement connexes de ce graphe.



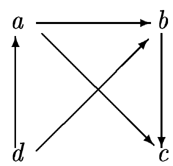
Exercice 9 *(Reconstitution d'un graphe à partir de son codage)*
1. Reconstituer les graphes à partir de leurs matrices d'adjacences:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Reconstituer les graphes à partir de leurs matrices d'incidence:

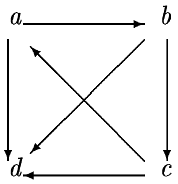
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}: \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

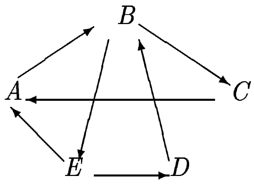
Exercice 10 *(Puissance d'une matrice d'adjacence)*
On considère le graphe ci contre.
Donnez sa matrice d'adjacence A.
Calculer A^2, puis A^3 et donnez
une interprétation des coefficients de ces matrices.

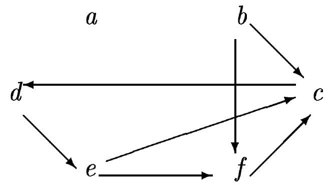


Chapitre 3: Graphes et graphes orientés connexes

Exercice 11 *(Forte connexité et composantes fortement connexes)*
Pour chacun des graphes suivants, dire s'il est fortement connexe. Si non, alors donnez ses composantes fortement connexes.







Exercice 12 *(Connexité théorique)*
Soit G un graphe connexe.
1. Montrez que si x est un sommet de degré 1, alors $G \setminus \{x\}$ est encore un graphe connexe.
2. Montrez que si G est connexe d'ordre $n \leq 2$, alors il doit au moins avoir n-1 arêtes.
Quand est-il de la réciproque.
3. Soit G un graphe d'ordre n que l'on ne suppose plus initialement connexe. Montrer que si G a strictement plus de (n-1)(n-2)/2 arêtes, alors G est connexe.

Exercice 13 *(Connexité et relation d'équivalence)*
On peut modéliser une relation binaire $\Re$ sur un ensemble comme étant un arc entre deux sommets (ainsi, la relation $a\Re b$ est représentée par l'arc (orienté) (a,b)), les sommets du graphe ainsi crée représentant évidement les éléments de l'ensemble initial.
1. On définit sur l'ensemble $X = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ la relation $\Re$ par: $x\Re y \Longleftrightarrow x - y$ multiple de 3.
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et représentez le graphe associé.
2. On définit maintenant sur le graphe orienté G=(V,E) la relation suivante:

$$\forall (x,y),\ x\Re y \longleftrightarrow \begin{cases} \textit{soit} \quad x = y \\ \textit{soit il existe une chaine entre } x \textit{ et } y \end{cases}$$

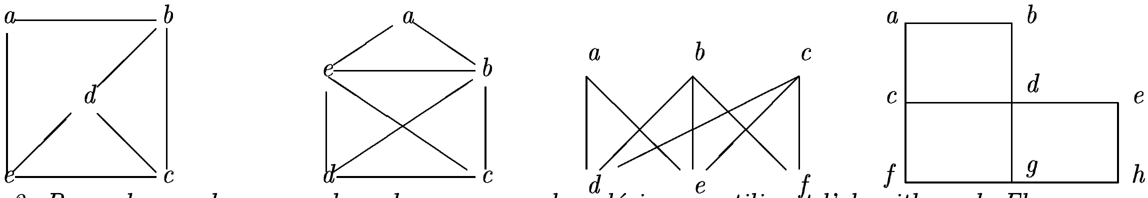
Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.
Montrer que les clases d'équivalences de cette relation sont les composantes connexes du graphe G.
3. En vous inspirant de la question précédente, donnez une définition de la notion de composantes fortement connexe d'un graphe comme classes d'équivalence d'une certaine relation.

Correction:
Pour montrer que cette relation est bien une relation d'équivalence, montrons qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
Réflexive: $x\Re x$ puisque x-x=0, qui est bien un multiple de 3.
Symétrique: Supposons donc que $x\Re y$, donc x-y est un multiple de 3, soit par exemple 3k. Alors y-x=-3k est donc un multiple de 3, d'ou $y\Re x$.
Transitive: Supposons donc $x\Re y$ *et* $y\Re z$; donc x-y=3k et y-z=3k', donc x-z=x-y+y-z=3k-3k'=3 (k-k'), et c'est donc bien un multiple de 3, donc on a $x\Re z$.
2. De même, il suffit de vérifier les conditions précédentes; $\Re$ est évidement réflexive, puisque { x} est une chaîne reliant x à x, donc $x\Re x$. La symétrie est aussi évidente puisqu'une chaîne entre x et y est aussi une chaîne entre y et x. Enfin, si l'on a une chaîne entre x et y et une autre entre y et z, on obtient aisément une chaîne entre x et z en concaténant les chaînes (ie on les met bout à bout). Ainsi, on en déduit que la relation $\Re$ ainsi définie est une relation réflexive, symétrique et transitive, donc d'équivalence.
Soient x et y deux sommets d'une même classe d'équivalence du graphe G par cette relation. Par définition de la classe déquivalence, nous savons que $x\Re y$, donc il existe une chaîne entre x et y, d'ou x et y sont dans une même composante connexe. Inversement, si l'on considère x et y deux sommets d'une même composante connexe de G, il existe donc une chaîne reliant x à y, et donc $x\Re y$, ce qui implique qu'ils soient dans la même composante connexe.

L'exercice précédent montre que l'on peut définir certains objets de théorie des graphes comme objets algébriques, et réciproquement; cette remarque est vraie pour de nombreux autres domaines (topologie, probabilité), ce qui donne une grande richesse et variété à la théorie des graphes.

Exercice 14 *(Récurrence et connexité)*
1. Soit un graphe G d'ordre n et ayant strictement plus de (n-1)(n-2)/2 arêtes.
Montrez que ce graphe est connexe.
2. Soit G un graphe d'ordre n et ayant p composantes connexes. Montrez que ce graphe possède au plus (n-p)(n-p+1)/2 arêtes.

Exercice 15 *(Cycle eulérien).*
1. On rappel qu'un cycle eulérien d'un graphe est un cycle utilisant toutes les arêtes de G une fois exactement. Les graphes suivants sont ils eulériens?



2. Pour chacun de ces graphes, donnez un cycle eulérien en utilisant l'algorithme de Fleury.
3. Un graphe G est dit traversable s'il existe un chemin eulérien (donc chemin utilisant chaques arêtes une fois exactement). Lesquels des graphes précédents sont traversables?
Démontrer qu'un graphe G est traversable si et seulement si aucun ou deux de ses sommets sont de degré impaires.

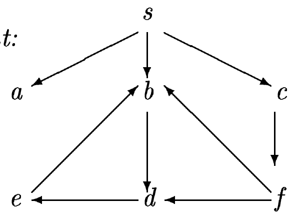
Note: La résolution de la troisième question montre une méthode assez courante en théorie des graphes: ramener le problème à un problème que nous connaissons déjà. Cela permet par exemple de classifier les problèmes selon un "ordre" (partiel) de difficulté, et de les regrouper dans des classes de problèmes de mêmes complexités; les plus connus de ces classes étant les classes P et NP...

Exercice 16 *(Graphe complet et traversabilité)*
Notons K_n le graphe complet à n sommets (rappelons que G est complet si $\forall (x,y) \in V(G), x, y(G)$.)
1. Donnez les valeurs de n pour lesquelles K_n est traversable.
2. Soit $K_{n,m}$ $(n \leq m)$ le graphe complet bipartit ayant n et m sommets ie on a une partition de V(G) en deux ensembles de sommets A d'ordre n et B d'ordre m, sans aucune arête interne, et $\forall a \in A, b \in B, \{a,b\} \in E(K_{n,m})$).
Combien y a t'il d'arêtes dans $K_{n,m}$?
3. Donnez les couples (n,m) tels que $K_{n,m}$ soit traversable.

Correction:
1. Un graphe complet à tous ses sommets de mêmes degrés: n-1. Ainsi, en utilisant le théorème de l'exercice précédent, nous savons qu'il est nécéssaire et suffisant que K_n ait 0 ou 2 sommets de degré impaire. Ainsi, tout les n impaires conviennent, car alors le degré de tout sommet est n-1 qui est pair. Reste encore à étudier les cas n pair pour lesquels on a seulement 2 sommets de degré impaire: il s'agit de n=2. Pour $n \leq 4$ et pair, on a au moins 3 sommets de degré impairs, et donc le graphe ne peut etre traversable.
2. Soit donc une bipartition (A,B) des sommets de G en deux ensemble, l'un d'ordre n et l'autre d'ordre m. Alors chacun des $a \in A$ admet m arêtes, d'ou il y a nm arêtes dans $K_{n,m}$.
3. D'après ce que l'on a dit, si n et m sont pairs, alors $K_{n,m}$ est necessairement traversable, car tous ses sommets seront soit de degré n, soit de degré m, qui sont donc pairs.
Reste à regarder les quelques cas particulier ou l'une au moins des valeurs est impaire. $K_{1,1} = K_2$ est nécessairement traversable. Si n=1, alors les m sommets de l'ensemble B seront de degré 1 (donc impaire): il ne peux y en avoir que 2 pour que cela soit compatible avec le théor'eme, donc $K_{1,2}$ est traversable. Enfin, si n impaire et strictement supérieur à 1, alors comme par convention $n \leq m$, on en déduit qu'il y aura m sommets de degré impaire dans le graphe, ce qui est impossible d'après le théorème.
Note: Vérifiez que tous les couples (n,m) ont bien été étudié si vous n'en êtes pas certain....

Chapitre 4: Cheminement dans un graphe et un graphe orienté

Exercice 17 *(Algorithme de parcours d'un graphe à partir d'un sommet)*
Soit G un graphe orienté, et s un sommet de G. A tout sommet x, on associe une marque booléenne M(x). L dénote une liste.



On considère l'algorithme suivant:
$\forall x \in V(G), M(x) \leftarrow faux$
$M(s) \leftarrow vrai;$
$L \leftarrow \{s\}.$
Tant que L non vide, faire:
Choisir $x \in L$.
Si tout les successeurs z de x sont tels que M(z)=vrai, ou si x n'a aucun successeur, alors $L \leftarrow L \setminus \{x\}$
Sinon, soit y un successeur de x tel que M(y)=faux; faire $M(y) \leftarrow vrai$ *et* $L \leftarrow L \cup \{y\}$
1. Traitez le graphe ci contre en gérant L comme une pile.
2. Traitez le en gérant cette fois-ci L comme une file.

Exercice 18 *(Problème du plus court chemin.)*
Soit G un graphe dont les arêtes sont pondérées (distances). On donne la matrice des distances suivante:

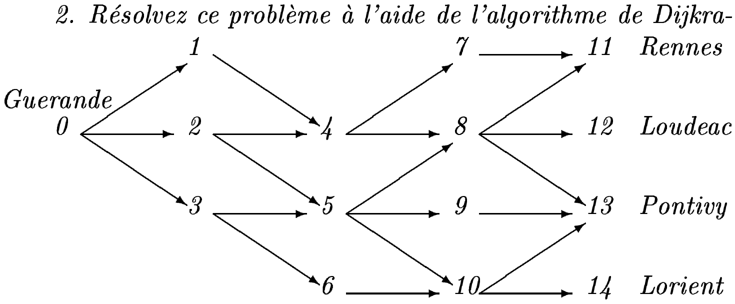
$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 2 & \infty & \infty & 8 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 8 & \infty & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

1. Reconstituez, à partir de cette matrice de distance, le graphe initial.
2. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra-Moore, trouvez le plus court chemin allant de A en B.
3. Même question, cette fois-ci à l'aide de l'algorithme de Bellman-Ford.

Exercice 19 *(Problème de cheminement optimal)*
Sire Gwendal, paludier à Guérande, en Pays de Loire, désire aller vendre sa récolte de sel dans l'une des 4 grandes foires de sa région: soit Renne (ville 11), soit à Louéac (ville 12), soit à Pontivy (ville 13), soit à Lorient (ville 14).
Il connaît les gains qu'il peut faire dans chacune de ces 4 villes, à savoir respectivement 550 ècus, 580, 590 et 600 écus à Lorient. Il connaît aussi les différents itinéraires pouvant le mener de Guérande (ville notée 0) à chacune des 4 villes, mais à chaques villages, villes ou ponts, il doit s'acquitter d'un droit de passage:

Ville	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Peage(ecu)	10	12	15	5	15	10	3	10	5	20	4	5	20	7

1. En ajoutant un sommet virtuel à l'arrivée, transformer ce problème en un problème de cheminement optimal.
2. Résolvez ce problème à l'aide de l'algorithme de Dijkra-Moore.



Exercice 20 *(Différence Bellman-Ford, Dijkra-Moore)*
Nous savons que l'algorithme de Dijkra-Moore ne peut fonctionner que sur un graphe valué positivement, alors que l'algorithme de Bellman-Ford peut lui, être utilisé avec un graphe arcs-valué quelconque.
Que pensez vous du raisonnement suivant: Soit (G,p) un graphe valué. On note $m = min_{(x,y)\in E(G)} p(x,y)$*.*
On considère le graphe (G',p') identique au graphe G, mais dont la valuation est: $p'(x,y) = p(x,y) - m$*.*
Le graphe G' sera alors valué positivement, et tout chemin optimal de G' sera un chemin optimal de G, donc on pourra utiliser l'algorithme de Dijkra-Moore dans G' afin de trouver un chemin optimal dans le graphe G.

Exercice 21 *(Puissance de la matrice d'adjacence d'un graphe)*
Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G. On note $a_{i,j}^{(k)}$ *le coefficient courant de la matrice* A^k*.*
Démontrez que $a_{i,j}^{(k)}$ *représente le nombre de chemin de longueur k allant du sommet i au sommet j.*

Correction:
On procède par récurrence: Pour k=1, c'est la définition du coefficient $a_{i,j}$ de la matrice d'djacence.
Supposons donc que ce soit vrai jusqu'au rang k, et démontrons la formule au rang k+1.
$A^{k+1} = A^k * A$, donc par identification des coefficients de la matrice, nous avons:

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}^{(k)} * a_{s,j}^{(1)}$$

Par hypothèse de récurrence, $a_{i,s}^{(k)}$ représente le nombre de chemin de longueur k entre les sommets i et s; en remarquant que tout chemin de longueur k+1 allant de i à j peut se décomposer en un chemin de longueur k reliant i à un certain sommet (s), et en un arc (s,j), on en déduit alors que $a_{i,j}^{(k+1)}$ représente bien le nombre de chemin de longueur k+1 reliant i à j....

Exercice 22 *Problème d'ordonnancement*
Lors de la constrution d'une maison, on distingue 12 travaux distincts.

Tache	*Libellé de la tache*	*Durée*	*Taches à terminer avant*
T1	*gros oeuvre*	*8*	
T2	*charpente*	*2*	*T1*
T3	*Toiture*	*1*	*T2,T1*
T4	*Plomberie*	*3*	*T1*
T5	*Instalation electrique*	*2*	*T1*
T6	*Ravalement*	*1*	*T1,T2,T3,T4*
T7	*Fenêtre*	*1*	*T1,T2*
T8	*Aménageme,ts extérieurs*	*1*	*T3,T4,T5*
T9	*Plâtres*	*2*	*T1,T3,T4,T5,T7*
T10	*Sols*	*2*	*T4,T5,T7,T9*
T11	*Peinture*	*2*	*T9*
T12	*Emménagement*	*1*	*Toutes les tâches*

Modélisez la situation proposée à l'aide d'un graphe, et déterminer la durée minimale du projet.
Facultatif: Indiquez les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche permettant de garantir cette durée optimale.

Chapitre 5: Arbres et arborescences

Exercice 23 *(Définitions équivalentes des arbres)*
Soit G un graphe d'ordre n. Montrer l'équivalence entre les propriètés suivantes:
1. G est connexe sans cycle.
2. G est connexe et a (n-1) arêtes.
3. G connexe minimal au sens des arêtes, ie si $F \subset E(G), F \neq E(G)$, *alors (V(G),F) est non connexe.*
4. G est sans cycle et a (n-1) arcs.
5. G est sans cycle et est minimal au sens des arêtes, ie si $F \subset E(G), F \neq E(G)$, *alors (V(G),F) a au moins un cycle.*
6. Pour tout sommet $(x, y) \in V(G)$, *il existe une unique chaîne entre x et y.*

Exercice 24 *Démonstration de l'algorithme de Prim*
Soit G un graphe connexe valué d'ordre n, dont les sommets sont notés $v_1, v_2, ..., v_n$. *On considère l'algorithme suivant:*
(1). On part d'un abre initial partiel A_1 *réduit à un sommet quelconque* v_{i_0}, *et on marque ce sommet.*
(2). A chaque itération de l'algorithme, on note V_p *l'ensemble des sommets marqués, et on construit* A_p *en augmentant* A_{p-1} *de l'arête de poids minimum dont une seule extrémit'e est marquée.*
(3). On marque l'extrémité non marqué de l'arête selectionné, et on retourne en 2, à moins que l'ensemble des sommets ne soient marqués.
Si tout les sommets sont marqués, alors A_n *contient l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de poids minimum.*
1. L'algorithme se termine-t-il?
Indication: démontrez qu'étant donné un ensemble A_p *non vide et ne contenant pas l'ensemble des sommets des sommets de G, alors l'algorithme se poursuit, et que l'ensemble* A_{p+1} *est différent de l'ensemble* A_p *(ie: l'algorithme ne boucle pas).*
2. Démontrez que l'on obtient bien finalement un arbre couvrant de poids minimum.

Exercice 25 *Problème d'interconnexion entre des villes.*
On souhaite créer un réseau d'interconnexion électrique dans un pays en voie de développement entre 6 villes, notées $\{1, 2, ..., 6\}$. *Une étude a éé menée sur les différents coûts de constructions entre ces villes; on le donne sous forme de la matrice suivante (le coefficient* $a_{i,j}$ *représentant le coût de construction entre les villes i et j):*

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & \infty & \infty \\ 10 & 0 & 20 & 30 & \infty & 50 \\ 20 & 20 & 0 & 10 & 50 & 70 \\ 30 & 30 & 10 & 0 & 55 & 30 \\ \infty & \infty & 50 & 55 & 0 & 60 \\ \infty & 50 & 70 & 30 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Construisez le graphe représentant ces villes, leurs liens et le cout de la construction de ce lien.
2. A quel problème classique de thèorie des graphe's se problème se ramène-t-il?
3. Résolvez celui-ci par les algorithmes classiques.

Exercice 26 *La grande évasion*
Un groupe d'activiste souhaite libérer des prisonniers politiques retenus dans une prison. D'après les renseignements founis par leurs informateurs dans la place, on a, en plus des différents quartiers de détentions, le temps qu'il faut pour forcer la serrure entre les 2 zones. Le dessin ci dessous représente donc les murs de la prison, avec le temps associé à chaques passages. Représentez ce problème à l'aide d'un graphe, et trouvez le chemin minimum permettant de liberer l'ensemble des prisonniers.