*La liste d'exercice ci-dessous regroupe mes sujets de colles en MPSI.1 au lycée Pierre de Fermat à Toulouse. Notez que bon nombre de ceux-ci sont assez difficile, et il est plus que probable que, seul, l'élève n'arrive pas à bout de ces exercices. Néanmoins, ces exercices sont prétextes à révision du cours, révision de méthodes de calculs... C'est avec indications, étapes intermédiaires, explications des étapes, partages d'idées que j'attends qu'ils soient résolus, tout ou partie.*
*Seules les questions de cours doivent être faite de façon autonome par l'étudiant.*
*Bon courage !*
*Jf.*

---

**Question de cours**
Donner la définition d'une fonction surjective.
Donner le contraire de cette définition.
Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijective ?
1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $f_1(x) = 2x$
2. $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ; $\mathrm{f}_2(x) = 2x$
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $f_3(x) = x^3 - x$

**Exercice**
Dans cet exercice, $n$ désigne un entier supérieur à 3. Démontrer que la somme des angles d'un polygône (du plan) non croisé à $n$ cotés vaut $(n-2)\pi$.

**Problème : Théorème de Cantor-Bernstein**
Soient $X$ et $Y$ deux espaces. On suppose qu'il existe deux applications injectives $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$. Démontrer que $X$ et $Y$ sont en bijection.
**Indication** : On introduira les ensembles suivants :
$C_0 = X \setminus g(Y)$. Que dire si $C_0 = \emptyset$ ?
$C_{n+1} = g(f(C_n))$, pour tout $n \neq 0$.
Considérer l'ensemble $C$ union des ensembles précédents.
**Application :**
Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont en bijection.
Monter que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont en bijection.

---

**Question de cours**
On considère $X, Y$ et $Z$ trois espaces.
Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions.
Si $fog$ est une fonction injective, que pouvez-vous dire des fonctions $f$ et/ou $g$ ?
Lorsqu'une fonction ne possède pas une propriété, donnez un exemple l'illustrant.
Même question si $fog$ est bijective.

**Exercice 1.** Démontrer que, pour tout entier strictement positif $n$, nous avons :
1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Que pouvez-vous dire de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ?

**Exercice 2.**
Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Montrer qu'il existe deux irrationnels $x$ et $y$ tels que $x^y$ soit rationnel.

**Exercice 3.**
Montrer que tout polygône de l'espace contient deux faces ayant même nombre de côté.

**Question de cours**
Soit $P$ et $Q$ deux propositions.
Que signifie démontrer $P \Rightarrow Q$ par absurde ? Par contraposé ?
Qu'est ce que la négation de $P \Rightarrow Q$ ?

**Exercice 1.**
1. Donner le développement décimal de 5/7. Que remarquez-vous quand à la périodicité des décimales ?
Soient $p, q$ deux entiers premiers entre eux. Démontrer que le développement décimal de $\frac{p}{q}$ est périodique.

**Exercice 2.**
On considère une application $f : X \to Y$.
a. Que signifie $f(X)$ ? $f^{-1}(Y)$ ?
b. Montrer que $\forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
c. Montrer que $f$ surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
d. Monter que $f$ injective $\Leftrightarrow \forall A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
e. Montrer que $f$ bijective $\Leftrightarrow \forall A \subset X$, $f(^C A) =^C f(A)$.

**Exercice 3.**
Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.

# Colle 2

**Questions de cours**
1. Exprimer $\cos(nx)$ comme un polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
2. Montrer que l'exponentielle complexe est un morphisme de groupe de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^*, *)$.
Ce morphisme est-il injectif ? Quel est son noyau ?
3. Donnez la preuve de la résolution d'une équation de degré 2 à coefficient dans $\mathbb{C}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que sont les racines $n^{ieme}$ de l'unité ?
Quelle est la structure algébrique de l'ensemble formé par ces racines de l'unité ?
Que forme géométriquement l'ensemble des points dont les affixes sont ces racines de l'unité ?
Que vaut la somme de ces racines de l'unité ? Donnez une interprétation géométrique de celle-ci.

**Exercice 1**
Soit $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On pose $u_0 = 1 + i$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = au_n$.
1. Démontrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+6} = u_n$.
2. On pose $\forall n \geqslant 0$, $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Calculez $S_5$.
Exprimez $S_n$ selon la valeur de $n$.
Trouver une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_n + u_{\phi(n)}$.

**Exercice 2**
1. Pour $n \geqslant 2$, calculez $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$.
2. Déduisez-en la valeur de $\sum_{k=1}^{n-1} \cos(\frac{k\pi}{n})$.
3. Pour $n \geqslant 2$, calculez $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$.

**Exercice 3**
Calculez $\cos(\frac{\pi}{11}) + \cos(\frac{3\pi}{11}) + \cos(\frac{5\pi}{11}) + \cos(\frac{7\pi}{11}) + \cos(\frac{9\pi}{11})$.

**Exercice 4**
Soient $a, b, c$ trois réels tels que $\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) = 0$ et $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 0$.
1. Calculez : $\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c)$.
2. Calculez : $\sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c)$.

**Exercice 5**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
1. Résolvez l'équation $z \in \mathbb{C}$, $(z+1)^n = e^{2ina}$.
2. Calculez la valeur de $P_n = \Pi_{k=0}^{n-1} \sin(a + \frac{k\pi}{n})$.

**Exercice 6** Racines complexes d'un polynômes à coef. entiers
Soit $P(x) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficient réel. On désigne par $z$ une racine complexe non réelle de $P$.
1. Montrer que $\overline{z}$ est alors racine de $P$.
2. Si $z$ est racine double de $P$, $\overline{z}$ est-elle racine double de $P$ ?
3. Existe-t-il un polynôme à coefficient réel ayant exactement 17 racines complexes non réelles ?

**Exercice 7** Structure algébrique des racines de l'unité
Soit $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in \mathbb{C}/k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}\}$ l'ensemble des racines $n^{ieme}$ de l'unité.
Une racine $n^{ieme}$ de l'unité est dite *primitive* si elle est d'ordre $n$.
1. Etudiez les cas $n = 3, 4, 5, 6$ et indiquez quelles sont les racines primitives pour ces ordres.
2. Etablissez un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}_n, ?)$ munit d'une loi à précisez.
3. Combien y a-t-il de racines de l'unité primitives ?

# Colle 3

**Questions de cours**
1. Enoncez et démontrer le théorème dit de la médiane.
2. Enoncez et démontrer l'inégalité triangulaire. Quel est la cas d'égalité ?
3. Démontrer que la fonction "module" est 1-lipschitzienne. Etudiez le cas d'égalité.
4. Enoncez et démontrer l'identité dit du parallèlogramme.

**Exercice 1** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.
1. Montrer que $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|+|z'|)^2$. Donnez une interprétation géométrique de ce résultat.
2. Si $u^2=zz'$, montrer : $\exists(v,v')\in\mathbb{C}^2,\quad v^2=z, v'^2=z',\quad u=vv'$.
3. En déduire : $|z|+|z'|=|\frac{z+z'}{2}+u|+|\frac{z+z'}{2}-u|$

**Exercice 2**
Soit $n$ un entier strictement positif quelconque.
1. Résolvez "géométriquement" l'équation suivante :

$$(z+1)^{2n+1}-(z-1)^{2n+1}=0$$

2. Déduisez-en la valeur de $S=\sum_{k=1}^{n}(cotan(\frac{k\pi}{2n+1}))^2$.

**Exercice 3**
Soit $n$ un entier strictement positif. On dénote par $\{\omega_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ les racines $k^{ieme}$ de l'unité.
Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes. Donnez une expression simple (en fonction, uniquement, de $a,b,n$) de

$$P=\Pi_{k=1}^{n}(a+b\omega_k)$$

**Exercice 4**
On définit $A,B$ et $C$ par :

$$A=\sum_{\substack{k=0\\k=0[3]}} C_n^k;\qquad B=\sum_{\substack{k=0\\k=1[3]}} C_n^k;\qquad C=\sum_{\substack{k=0\\k=2[3]}} C_n^k;$$

1. Calculez les sommes suivantes : $A+B+C$, $A+jB+j^2C$ et $A+j^2B+jC$.
2. Déduisez-en la valeur de $A$.

**Exercice 5**
Soient $n$ et $k$ deux entiers strictement positifs. Démontrer les égalités suivantes :
1. $C_{2n}^n=\sum_{i=0}^{n}(C_n^i)^2$
2. $C_{n+k}^n=\sum_{i=0}^{k}C_k^iC_n^{k-i}$

**Exercice 6**
1. Montrer qu'un triangle dont les sommets sont d'affixes $a,b$ et $c$ est équilatéral si et seulement si $a+jb+\overline{j}c=0$.
2. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$. Interpréter géométriquement le système :

$$a+c=b+d;\quad a+ib=c+id$$

**Exercice 7**
Soit $n\geqslant 2$. Monter que :

$$\forall 1\leqslant k\leqslant n-1,\quad n|C_n^k \Longleftrightarrow n \text{ est premier}$$

**Exercice 8**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que l'enveloppe connvexe de l'ensemble des racines de $P$ contient les racines de $P'$.

**Exercice 9**

Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes non nuls.
1. Montrer $|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}| = \frac{|a-b|}{|ab|}$
2. Montrer que pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, on a : $|x|.|y-z| \leqslant |y|.|z-x| + |z|.|x-y|$
3. Montrer et interprétez l'inégalité de Ptolémée :

$$|x-y|.|z-t| \leqslant |x-z|.|y-t| + |x-t|.|y-z|$$

# Colle 4

**Questions de cours**
1. Enoncez et démontrez le théorème de Ptolémée.
2. Enoncez et démontrez une condition d'alignement des points $A(a), B(b)$ et $C(c)$.
3. Enoncez et démontrez une condition de cocyclicité ou d'alignement de quatre points $A, B, C, D$.
4. Définissez l'inversion de centre $P$ et de rapport $k$. Que pouvez-vous en dire ?
5. Soit $\alpha \neq k\pi$. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Arg(\frac{z-a}{z-b}) = \alpha$ ?

**Exercice 1**
Soit $\phi$ l'application du plan dans lui même qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

1. Montrer l'existence d'un unique point invariant $I$.
2. Montrer que pour tout point $M$ d'image $M'$ par $\phi$, le triangle $IMM'$ est rectangle.

**Exercice 2**
1. Soient $a$ et $b$ deux complexes non nuls.
Montrez :

$$|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}| = \frac{|a-b|}{|ab|}$$

2. Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$. Montrez

$$|x|\ |y-z| \leqslant |y|\ |z-x| + |z|\ |x-y|$$

3. Montrer alors l'inégalité de Ptolémée :

$$|x-y|\ |z-t| \leqslant |x-z|\ |y-t| + |x-t|\ |y-z|$$

**Exercice 3**
On se place dans le plan complexe. Soient $A$ et $B$ les points d'affixe respective $-1$ et $1$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $AB$.
1. Donnez l'équation de $\mathcal{C}$.
2. Etudier l'image du cercle l'application :

$$z \longrightarrow \frac{z+4}{z-1}$$

**Exercice 4**
Déterminez l'ensemble des points d'affixe $z$ tels que $(\frac{z+1}{z-1})^4$ soit réel.

**Exercice 5**
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$ sachant que l'une des racines est réelle.
2. Montrer que les solutions sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

**Exercice 6**
1. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $u$ et $v$. Quelle est l'expression complexe de $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ ?
2. Enoncez et démontrer l'équation (complexe) vérifiée par l'affixe $z$ des points $M$ appartenant à un cercle.
3. Quelle est la définition géométrique d'une inversion de pôle $P$ et de puissance $k$ ?
Donnez ensuite l'expression complexe de celle-ci.
4. Montrer que l'image par la précédente inversion d'un cercle $\mathcal{C}$ ne passant pas par $P$ est un cercle.

**Solution exercice 1**

Soit $\phi$ l'application du plan dans lui même qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
1. Montrer l'existence d'un unique point invariant $I$.
2. Montrer que pour tout point $M$ d'image $M'$ par $\phi$, le triangle $AMM'$ est rectangle.

1. En résolvant l'équation $z = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, nous trouvons l'unique solution $z = 2$.
2. Soit $I$ le point fixe. Nous avons :
$\overrightarrow{IM}$ a pour affixe : $z - 2$, $\overrightarrow{IM'}$ a pour affixe : $z' - 2$, $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe : $z' - z$.
Ainsi nous en déduisons : $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{MM'}) = arg(\frac{z'-z}{z-2})$, $(\overrightarrow{IM'}, \overrightarrow{MM'}) = arg(\frac{z'-z}{z'-2})$.
Nous avons : $z' - 2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}(z-2)$, $z' - z = (z' - z) - (z - 2)$.
Ainsi, nous obtenons les arguments :

$$(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{MM'}) = arg(\frac{z'-z}{z-2}) = arg(-\frac{1-i\sqrt{3}}{4})$$

qui est donc d'argument $2\pi/3$. L'autre argument vaut alors :

$$(\overrightarrow{IM'}, \overrightarrow{MM'}) = arg(\frac{z'-z}{z'-2}) = arg(1 - \frac{i\sqrt{3}}{2})$$

que l'on identifie comme l'argument de $\pi/2$. Ainsi, le triangle est bien rectangl en $M'$.

**Exercice 5**

1. Donnez l'équation d'un cercle dans $\mathbb{C}$.
$az\overline{z} + k\overline{z} + \overline{k}z + d = 0$ avec $a, d \in \mathbb{R}$.
2. Définissez ce qu'est une inversion de pôle $P$ et de puissance $k$.
3. Démontrer que l'ensemble des cycles ( droites et cercles ) est conservé par inversion.
azz* + kz* + k*z + d = 0 avec a et d réels et il est évident que cet ensemble est conservé par inversion.

**Exercice 3**

Soit $n$ un entier strictement positif. On dénote par $\{\omega_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$ les racines $k^{ieme}$ de l'unité.
Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes. Donnez une expression simple (en fonction, uniquement, de $a, b, n$) de

$$P = \Pi_{k=1}^{n}(a + b\omega_k)$$

**Exercice 4**

On définit $A, B$ et $C$ par :

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k=0[3]}} C_n^k; \qquad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k=1[3]}} C_n^k; \qquad C = \sum_{\substack{k=0 \\ k=2[3]}} C_n^k;$$

1. Calculez les sommes suivantes : $A + B + C$, $A + jB + j^2C$ et $A + j^2B + jC$.
2. Déduisez-en la valeur de $A$.

**Exercice 5**

Soient $n$ et $k$ deux entiers strictement positifs. Démontrer les égalités suivantes :
1. $C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2$
2. $C_{n+k}^n = \sum_{i=0}^k C_k^i C_n^{k-i}$

**Exercice 6**

1. Montrer qu'un triangle dont les sommets sont d'affixes $a, b$ et $c$ est équilatéral si et seulement si $a + jb + \overline{j}c = 0$.
2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$. Interpréter géométriquement le système :

$$a + c = b + d; \quad a + ib = c + id$$

**Exercice 7**
Soit $n \geqslant 2$. Monter que :

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad n | C_n^k \Longleftrightarrow n \text{ est premier}$$

**Exercice 8**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que l'enveloppe connvexe de l'ensemble des racines de $P$ contient les racines de $P'$.

**Exercice 9**
Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes non nuls.
1. Montrer $|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}| = \frac{|a-b|}{|ab|}$
2. Montrer que pour $x, y, z \in \mathbb{C}$, on a : $|x|.|y-z| \leqslant |y|.|z-x| + |z|.|x-y|$
3. Montrer et interprétez l'inégalité de Ptolémée :

$$|x-y|.|z-t| \leqslant |x-z|.|y-t| + |x-t|.|y-z|$$

**Exercice 10** Structure algébrique des racines de l'unité
Soit $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in \mathbb{C} / k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}\}$ l'ensemble des racines $n^{ieme}$ de l'unité.
Une racine $n^{ieme}$ de l'unité est dite *primitive* si elle est d'ordre $n$.
1. Etudiez les cas $n = 3, 4, 5, 6$ et indiquez quelles sont les racines primitives pour ces ordres.
2. Etablissez un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}_n, ?)$ munit d'une loi à précisez.
3. Combien y a-t-il de racines de l'unité primitives ?

# Colle 5

**Questions de cours**
1. Les points suivants sont-ils coplanaires ?

$$A : \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad B : \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \quad C : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Déterminez la distance du point $A : (0, 0, 3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$.
3. La projection stéréographique est-elle une inversion ? Si oui, quelle est son centre et son rapport ?

**Exercice 1**
Soit $\phi$ l'application du plan dans lui même qui, au point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

1. Montrer l'existence d'un unique point invariant $I$.
2. Montrer que pour tout point $M$ d'image $M'$ par $\phi$, le triangle $IMM'$ est rectangle.

**Exercice 2**
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}))$ un repère orthonormal direct du plan. On considère l'application $f$ qui au point $M : (x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = & -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = & \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

Montrer que $f$ est la composée commutative d'une réfléxion et d'une translation.

**Exercice 3**
On se place dans le plan complexe. Soient $A$ et $B$ les points d'affixe respective $-1$ et $1$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $AB$.
1. Donnez l'équation de $\mathcal{C}$.
2. Etudiez l'image du cercle par l'application :

$$z \longrightarrow \frac{z - 1}{z + 5}$$

3. Etudiez l'image du cercle l'application :

$$z \longrightarrow \frac{z + 4}{z - 1}$$

**Exercice 4**
Soient $A, B, C$ trois points non alignés du plan, d'affixes respectives $a, b, c$. On désigne par $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$. Soient $A'$, $B'$ et $C'$ les points où les médianes $(GA)$, $(GB)$ et $(GC)$ recoupent le cercle circonscrit au triangle. Nous notons $a'$, $b'$ et $c'$ les affixes respectives de $A'$, $B'$ et $C'$.
Montrer que

$$\frac{1}{g - a'} + \frac{1}{g - b'} + \frac{1}{g - c'} = 0$$

*Indication :* On pourra exprimer $\overrightarrow{GA}.\overline{GA'}$ en fonction du rayon du cercle circonscrit.

**Exercice 5**
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$ sachant que l'une des racines est réelle.
2. Montrer que les solutions sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

**Exercice 6**
1. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $u$ et $v$. Quelle est l'expression complexe de $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ ?

2. Enoncez et démontrer l'équation (complexe) vérifiée par l'affixe $z$ des points $M$ appartenant à un cercle.
3. Quelle est la définition géométrique d'une inversion de pôle $P$ et de puissance $k$ ?
Donnez ensuite l'expression complexe de celle-ci.
4. Montrer que l'image par la précédente inversion d'un cercle $\mathcal{C}$ ne passant pas par $P$ est un cercle.

# Colle 6

**Exercice 1** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1+x^2)y' = \arctan(x)y$$

**Exercice 2** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - xy = x\sin(x^2)$$

**Exercice 3** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$2xy' + y = 7x^3 - 3x$$

**Exercice 4** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 1$$

**Exercice 5** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(\sin x + \cos x)y' - y\cos x = 0$$

**Exercice 7** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x^2+1)y' + (x-1)^2 = x^3 - x^2 + x + 1$$

**Exercice 8** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2xy - e^{x-x^2} = 0$$

**Exercice 9** Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x(1+x^2)y' - y = 0$$

**Problème 1**
Trouvez toutes fonctions $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f^2 + (1 - f') \leqslant 1$$

**Problème 2**
1. Résoudre l'équation différentielle $(E)$ suivante :

$$xy' + y = -1$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence d'une unique fonction $f_\alpha$ vérifiant $(E)$ et la condition $f_\alpha(1) = \alpha - 1$.
3. On note $D_\alpha$ la tangente à la courbe $f_\alpha$ au point d'abscisse 1.
Déterminez l'équation de $D_\alpha$.
En déduire que les droites $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ sont concourantes.

**Problème 3**
Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifiant :

$$f'(x)f(-x) = 1$$

**Problème 4**
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)y' + 4xy = 0$$

**Problème 5**
Soient $a$ et $b$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$, et soit $\alpha \in I$.
On considère l'équation différentielle $(E)$ suivante :

$$y' + ay = b$$

Soit $(f_A)_{A \in \mathbb{R}}$ la famille des fonctions solutions sur $I$ de $(E)$.
Montrer que les tangentes à la courbe $Y = f_A(x)$ au point d'abscisse $\alpha$ sont soit concourantes, soit parallèles.

# Colle 9

**Exercice 1**
Soit $ABCD$ un rectangle.
1. Montrer que pour tout point $M$ appartenant au cercle circonscrit à $ABC$, les rayons des cercles circonscrits aux triangles $MAB$ et $MBC$ sont égaux.
2. Déterminez l'ensemble des points $M$ tels que les cercles circonscrits aux triangles $MAB$ et $MBC$ soient de même rayon.

**Exercice 2**
On considère, dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $xy = 1$.
Montrer que quatres points $M_i(x_i, y_i)$ de $\mathcal{H}$ sont cocycliques si et seulement si $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

**Exercice 3**
On considère, dans le plan affine muni d'un repère orthonormé, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$.
Montrer que quatres points $M_i(x_i, y_i)$ de $\mathcal{P}$ sont cocycliques si et seulement si $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$.

**Exercice 4**
On considère le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.
Quel est le foyer $F$ de cette parabole ?
Soient $M$ et $N$ les points de $\mathcal{P}$ d'ordonnée respective $\alpha$ et $\mu$. Montrer que $F \in (MN) \Leftrightarrow \lambda\mu = -p^2$.
Soit $D$ une droite quelconque du plan passant par $F$. $D$ coupe $\mathcal{P}$ en $M$ et $N$. Déterminez le lieux des orthocentres des triangles $OMN$.

**Exercice 5**

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 5y = 0$$

**Exercice 6**
On considère le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Soit $\theta$ un angle quelconque.
1. Soit $\mathcal{R}'$ l'image de $\mathcal{R}$ par la rotation d'angle $\theta$. Exprimer les formules de changement de base (permettant d'exprime $M(x', y')$ dans $\mathcal{R}'$ en fonction de $M(x, y)$ dans $\mathcal{R}$).
2. Inversez ces formules.
3. Déterminer la anture et les éléments caractéristiques de la conique d'équation :

$$x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$$

**Exercice 7**
On considère le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = a^2$, avec $a > 0$. Soit $M(x, y)$ un point du plan. On note $A, B, A', B'$ les points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec les droites $D$ et $D'$, qui sont orthogonales en $M$.
1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MB'}$.
2. Soit $A''$ le symétrique de $A'$ par rapport à $M$. Montrer que les points $A, A'', B$ et $B'$ sont cocycliques.

**Exercice 8**
On considère le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $A$, et soit $M$ un point intérieur à $\mathcal{C}$. Soit $D$ un droite "tournant" autour de $M$ ; elle coupe $\mathcal{C}$ en $P$ et $Q$.
1. Quel est le lieu des points milieu de $[PQ]$ ?
2. Même question pour $\mathcal{E}$, ellipse.

**Exercice 9**
On se place dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les plans
$P_1 : 3x - z\cos t = -3\sin t$ ; $P_2 : 3y - 2z\sin t = 6\cos t$ ; $P_3 : 3x + z\sin t = 3\cos$ et $P_4 : 3y - 2z\cos t = 6\sin t$.
1. Calculez $\cos(t + \pi/4)$.
2. Montrer que les 4 plans ont un point $M_t$ en commun.
3. Déterminez le lieu des points $M_t$ quand $t$ décrit $\mathbb{R}$.

# Colle 10

**Exercice 1**
Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
Montrer que $A+B=\{a+b;\quad a\in A, b\in B\}$ admet une borne supérieure.
Montrer que $Sup(A+B)=Sup(A)+Sup(B)$

**Exercice 2**
Soit $A$ une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$.
Montrer que $-A$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ est précisez celle-ci.

**Exercice 3**
Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction croissante.
Montrer que $f$ admet un point fixe.

**Exercice 4**
Soit $G$ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro. On désigne par $G^+$ l'ensemble $\{x; x\in G, x>0\}$.
1. Prouver l'existence d'une borne inférieure à $G^+$. Soit $m$ celle-ci.
2. Montrer que si $m>0$, alors $G=m\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $m=0$, alors $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $\alpha$ un irrationnel. Montrer que $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 5**
On désigne par $a_n$ et par $b_n$ les deux suites suivantes :

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!};\qquad b_n=a_n+\frac{1}{n.n!}$$

1. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et que $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
Montrer que $\forall(i,j)\in\mathbb{N}{*}^2, a_i\leqslant b_j$.
2. Montrer que les intervalles $I_n=[a_n;b_n]_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ sont emboîtés et d'intersection vide dans $\mathbb{Q}$.
3. Montrer que l'ensemble $A=\{a_n, n\in\mathbb{N}^*\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

**Exercice 6**
Soient $A$ et $B$ deux parties non vides bornée de $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $Sup(A+B)=Sup(A)+Sup(B)$.
2. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$, déterminer $Sup(\lambda A)$.
3. Montrer que $Sup(A-B)=Sup(A)-inf(B)$.

**Exercice 7**
Soit $n$ un entier naturel non nul. On désigne par $A_n$ l'ensemble :

$$A_n=\{(x_1+x_2+...+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n})/(x_1,x_2,...,x_n)\in{\mathbb{R}_+^*}^n\}$$

Déterminer, s'il existe, $Inf(A_n)$.

**Exercice 8**
1. Montrer que pour $x\in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x)\leqslant x$.
2. Soit $A$ l'ensemble défini par :

$$A=\{(\frac{m+n+1}{m+n})^{m+n}/(m,n)\in\mathbb{N}^{*\ 2}\}$$

Montrer que $A$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et calculer $Sup(A)$.

**Exercice 9**
Soit A l'ensemble $A=\{\frac{n-1}{n+1}/n\in\mathbb{N}\}$. Montrer que 1 est point d'accumulation de cette suite.

**Exercice 10**
Soit $K$ un corps totalement ordonné dans lequel toute partie majorée admet un borne supérieure.
Montrer que $K$ est archimédien.

**Exercice 11**
1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$.
2. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de

$$A = \{x^2 + y^2 \ \ /(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$$

**Exercice 12**
Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de $A = \{\sin(\frac{2n\pi}{7}),\ n \in \mathbb{Z}\}$.

# Colle 14

**Exercice 1**
Soit $A \in \mathbb{R}[X],\ A \neq 0$. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble :

$$\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \text{ divise } P\}$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ ?
Si oui, trouver son supplémentaire ; si non, que faut-il lui ajouter pour le rendre SEV ?

**Exercice 2**
Soit $E$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F} = \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$

$$\mathcal{G} = \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.
2. Sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 3**
On désigne par $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{F} = \{f \in E : f \text{ est constante}\} \ \ ; \ \ \mathcal{G} = \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$$

1. Les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E$ ?
2. Sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 4**
On désigne par $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{F} = \{f \in E : f \text{ est constante}\} \ \ ; \ \forall a \in \mathbb{R}\ \mathcal{G}_a = \{f \in E : f(a) = 0\}$$

1. Les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}_a$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E$ ?
2. Sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 5**
On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0 \text{ et } x - 3y - 2z = 0\}$.
1. L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il un espace vectoriel ?
2. Si oui, donnez en un système de générateurs.

**Exercice 6**
On désigne par $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynôme de degré au plus 2 en X à coefficients réels.
$E^*$ désigne l'ensemble des formes linéaires sur $E$.
1. $E^*$ est-il un espace vectoriel ?
2. Montrer que $E$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.
Soient $f_0(P) = P(0)$, $f_1(P) = P(1)$ et $f_2(P) = P(2)$ trois formes linéraires de $E^*$.
Montrer que $f(P) = \int_0^1 P(t)dt \ \in \ Vect < f_0, f_1, f_2 >$.

**Exercice 7**

1. $\mathbb{R}_+^*$ munit des lois

$$x \oplus y = xy; \quad \lambda \odot x = x^\lambda$$

est-il un espace vectoriel ?

2. On considère $E$ l'ensemble des application de $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Est-ce un espace vectoriel ?
L'ensemble des fonctions de $E$ continues est-il un SEV de $E$ ?
L'ensemble des fonctions injectives de $E$ en est-il un ?
L'ensemble des fonctions surjectives de $E$ ?
L'ensemble des fonctions de $E$ vérifiant $\sqrt{2}f(a) = f(b)$ ?
L'ensemble des fonctions de $E$ vérifiant $f(a) = f(b) + 1$ ?

**Exercice 8**

Soit $E$ un EV, $p$ un projecteur et $u$ un endomorphisme de $E$.
Montrer que $p \circ u = u \circ p \Leftrightarrow \; Ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par $u$.

**Exercice 9**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $E$.
1. Montrer que $Ker(uv) = Ker(u)$ si et seulement si $Im(u) \cap Ker(v) = \{0_E\}$.
2. Montrer que $Im(uv) = Im(v)$ si et seulement si $Im(u) + Ker(v) = E$.

# Colle 16

**Exercice 1** Vectoriel et différentielle !
On considère l'équation différentielle
$$y'' + ay' + by = 0$$
où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
1. Montrer que l'ensemble des solutions forment un espace vectoriel $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est la dimension de cet espace ?
3. On considère l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ associée à cette équation.
Montrer que si cette équation caractéristique admet deux solutions $r_1$ et $r_2$, alors les solutions de l'équation différentielle sont de la forme
$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

Montrer que si l'équation caractéristique admet une solution double $r$, alors les solutions de l'équation différentielle sont de la forme
$$y = (A + Bx)e^{rx}$$

Enfin, montrer que si l'équation caractéristique admet deux racines complexes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors la solution générale de l'équation différentielle est :
$$y = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

**Exercice 2** Vectoriel et récurrence
Soit $E$ l'espace vectoriel des suites de réels et $\mathcal{E}$ le sous-ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence
$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$
1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 3^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
3. Quel est la dimension de $\mathcal{E}$ ? En donner une base.

**Exercice 3** Espace des polynômes
Soit $n$ un entier naturel strictement positif. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Quel est sa dimension ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré $n$. La famille $\{P, P'\}$ est-elle liée ? La completer en une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Exercice 4** Espace des polynômes
On désigne par $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel. Quel est sa dimension ?
2. Montrer qu $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)x + \mu x^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donnez-en une base.

**Exercice 5**
On désigne par $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions définies dans $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
1. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, quel en est la dimension ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n(x) = \cos(nx)$. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{f_0, f_1, f_2, ..., f_k\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ?

**Exercice 6**
On désigne par $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions définies dans $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.
1. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, quel en est la dimension ?
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

**Exercice 7** Formule de Grassmann.
Pour $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$, la formule de Grassmann est :

$$dim(E_1 + E_2) + dim(E_1 \cap E_2) = dim(E_1) + dim(E_2)$$

On considère $E_1$ et $E_2$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$ : On pose :

$$u : E_1 \times E_2 \longrightarrow E, \quad (x, y) \longrightarrow x + y.$$

1. $u$ est-elle une application linéaire ? Quel en-est le noyau ?
2. En déduire la formule de Grassmann.

**Exercice 8** Projection en dimension finie
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. Montrer que

$$f \text{ projection } \Leftrightarrow rg(f) + rg(f - Id) = n$$

**Exercice 9** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$.
a. Montrer que $f \circ g \circ f = f \Rightarrow f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projections.
b. Montrer qu'alors $Ker(f) = Ker(g \circ f)$ et $Im(f) = Im(f \circ g)$.
c. Soient les assersions :
(i) $f \circ g \circ f = f$ ; (ii) $g \circ f \circ g = g$ ; (iii) $rg(f) = rg(g)$
Montrer que deux quelconques de ces assersions impliquent la troisième.

**Exercice 10**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $dim(F) + dim(G) = n$. Montrer l'existence d'un élément $h \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $Ker(h) = F$ et $Im(h) = G$.

**Exercice 11**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = Ker(\phi^k)$ et $I_k = Im(\phi^k)$.
a. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion. Qu'en est-il de $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ?
b. Montrer l'existence d'un rang $p_0$ pour lequel :

$$\left\{ \begin{array}{l} k < p_0 \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ et } I_k \neq I_{k+1} \\ k \geqslant p_0 \Rightarrow N_k = N_{k+1} \text{ et } I_k = I_{k+1} \end{array} \right.$$

c. Montrer que $\phi$ induit un automorphisme de $I_{p_0}$ et que $E = N_{p_0} \oplus I_{p_0}$.
d. Montrer que $rg(\phi^n) = rg(\phi^{n+1})$. Montrer que si $\phi$ est nilpotent, alors $\phi^n = 0$.

**Exercice 12** Supplémentaire commun
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. On considère deux sous-espaces $G$ et $H$ de $E$ de même dimension. Montrer que $G$ et $H$ admettent un supplémentaire en commun.

# Colle 17

**Exercice 1** Continuité des fonctions cos et sin
1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons l'inégalité : $|\sin(x)| \leqslant |x|$
2. En déduire que la fonction sin est continue en 0.
3. Montrer : $|\cos(x) - 1| = 2\sin^2(x/2) \leqslant x^2/2$. En déduire la continuité de cos en 0.
4. Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - sin(\alpha)| \leqslant |x - \alpha|$. En déduire la continuité de la fonction sin en tout point de $\mathbb{R}$.
5. Démontrer, de manière similaire, la continuité de la fonction cos en tout point de $\mathbb{R}$.

**Exercice 2** Prolongement par continuité.
Etudiez le prolongement par continuité des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \cos(1/x)$ en 0 ?
2. $x\sin(1/x)$ en 0 ?

**Exercice 3** Continuité et périodicité.
Soit $f$ une fonction continue non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}(f)$ l'ensemble des périodes de $f$, ie.

$$\mathcal{P}(f) = \{t \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x+t) = f(x)\}$$

1. Montrer que $\mathcal{P}(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
Rappelez brièvement quels sont les sous-groupes (additifs) de $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ tel que $\mathcal{P}(f) = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour période. Que pouvez-vous dire de $f$ ?
4. Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique et non constante. Montrer que l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2 = f$ ne peut posséder deux solutions périodiques linéairement indépendantes.

**Exercice 4** Uniforme continuité
1. Rappelez la définition d'uniforme continuité.
2. Discutez, selon la forme du polynôme $P(x)$, de l'uniforme continuité de la fonction $x \longrightarrow P(x)$.
3. La fonction $x \longrightarrow \sin(x)$ est-elle uniformément continue ?
4. La fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est-elle uniformément continue ?

**Exercice 5** Etude de continuité
Soit $f : ]0;1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = 0$ si $x$ est irrationnel, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$, avec $p$ et $q$ premiers entre eux.

**Exercice 6**
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe deux réels, $a$ et $b$ ($|a| \neq 1$), tels que, pour tout réel $x$, $f(ax+b) = f(x)$. Montrer que $f$ est nécessairement une fonction constante.

**Exercice 7** Uniforme continuité
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.
1. Montrer l'existence de deux constantes réelles, $a$ et $b$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.
2. La fonction $x \to x^2$ est-elle uniformément continue ?

**Exercice 8**
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, non-constante et $p$-périodique $p > 0$.
Montrer qu'il existe un réel $a$ tel que $f(a + p/2) = f(a)$.

# Colle 18

**Exercice 1** Etude de dérivabilité
Etudiez la déribabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |cos\left(\frac{\pi}{x}\right)| & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Exercice 2** Dérivée d'ordre $n$
Pour tout entier naturel non nul $n$, calculez la dérivée d'ordre $n$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calculez aussi tous les racines de $f^{(n)}(x)$.

**Exercice 3**
Soit $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une suite finie de réels ou de complexes.
Montrer que si $|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)| \leqslant |\sin(x)|$ pour tout réel $x$ dans un voisinage de 0, alors $|\sum_{k=1}^{n} ka_k| \leqslant 1$.

**Exercice 4** Avec un passage somme / intégral !
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable en 0 avec $f(0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = f'(0)\ln(2).$$

**Exercice 5**
Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable en 0 avec $f(0) = 0$.
1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)/2.$$

2. Etudiez la limite, pour $n \to +\infty$ de $\Pi_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

**Exercice 6**
Soit $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a$ intérieur à $\mathcal{I}$.
1. Montrer que pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{I}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n < a < y_n \\ lim_{n\to+\infty} \quad x_n = lim_{n\to+\infty} y_n = a \end{cases}$$

on a : $lim_{n\to+\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$.
2. Le résultat est-il toujours valable sans l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < a < y_n$ ? (considérer $f(x) = x^2 \sin(1/x)$).

**Exercice 7**
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$.
Montrer l'existence d'un réel $c$ dans $]0,1]$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

# Colle 19. Convexité

**Question de cours**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
1. Rappelez la définition d'une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$. Rappelez la définition d'une partie convexe du plan réel.
2. On défini l'épigraphe d'une fonction $f$ comme étant l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} | y \geqslant f(x)\}.$$

Montrer que la fonction $f$ est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe du plan.

**Exercice**
1. Montrer que la fonction $x \to e^x$ est convexe et que la fonction $x \to \ln(x)$ est concave.
2. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x + 1$.
3. Montrer que si $p$ et $q$ sont deux réels strictement positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v.$$

En déduire : $\forall x \in ]0, \pi/2[, \quad \frac{2}{\pi} x < \sin(x) < x$.

---

**Question de cours**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
1. Rappelez la définition d'une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f$ est convexe si et seulement si, pour tout couple $(A, B)$ avec $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $a < b$, la courbe représentant la restriction de $f$ à l'intervalle $[a, b]$ est au-dessous du segment $[A, B]$.

**Exercice 4**
1. Montrer que si $f$ est une fonction convexe et continue sur $[0, 1]$, alors pour tout entier strictement positif $n$, la fonction polynomiale $B_n(f)$ est convexe sur $[0, 1]$.

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}.$$

---

**Question de cours**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $f$ est convexe si et seulement si, pour tout couple $(x, y)$ de points de $I$, la fonction $f_{x,y} : t \to f((1 - t)x + ty)$ est une fonction convexe sur $[0, 1]$.

**Exercice**
On considère une fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue. Soit $y$ une solution à valeur réelle de l'équation différentielle :

$$y" - qy = 0.$$

1. Montrer que si $y$ s'annule en deux valeurs distinctes, alors $y$ est la fonction identiquement nulle.
2. Montrer qu'il en est de même si l'on suppose que $y$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

---

**Question de cours / Exercice**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. On note, pour $x \neq y$ dans $I$, $p(x, y)$ la pente de la droite $(MN)$ où $M = (x, f(x))$ et $N = (y, f(y))$.
1. Donnez une expression de $p(x, y)$ en fonction de $x, y, f(x)$ et $f(y)$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   - $f$ est convexe
   - pour tout $x, y, z$ dans $I$ vérifiant $x < y < z$, $p(x, y) \leqslant p(x, z) \leqslant p(y, z)$.
   - Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

3. Montrer que si $f$ est convexe dans $I$, alors en tout point intérieur à $I$, les fonctions dérivée à droite et dérivée à gauche sont croissantes sur $\mathring{I}$.
Montrer que pour $a < b$ dans $\mathring{I}$, on a :

$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b).$$

4. En déduire qu'une fonction convexe sur $I$ est continue sur $\mathring{I}$.
5. Montrer que si $f$ est continue sur $I$ et convexe sur $\mathring{I}$, alors elle est convexe sur $I$.

---

**Question de cours**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
1. Rappelez la définition d'une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f$ est convexe si et seulement si, pour tout couple $(A, B)$ avec $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $a < b$, la courbe représentant la restriction de $f$ à l'intervalle $[a, b]$ est au-dessous du segment $[A, B]$.

**Exercice**

Considèrons $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = xf(1/x)$.
Montrer que $f$ est convexe si et seulement si $g$ est convexe.

---

**Exercice**

On considère $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
1. Montrer que la fonction $g : x \to \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie ou égale à $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$, alors la fonction $h$ défninie par $f(x) - \alpha x$ admet une limite finie ou égale à $-\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice**

Si $f$ est une fonction convexe définie sur une partie convexe de l'espace vectoriel normé $E$, alors pour toute combinaison linéaire convexe $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ d'éléments de $I$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$